

摂動QCDとsmall- x の物理

前田 達成

M1479024

広島大学大学院理学研究科物理学専攻

クォーク物理学研究室

指導教官 杉立 徹

平成16年2月13日

概要

parton 分布函数を精密に決定することは、e-p 散乱による実験 data の解析に必要不可欠である。HERA は、構造函数 $F_2(x, Q^2)$ の測定に対して、 $1.5 < Q^2 < 5000 \text{ GeV}^2$ 、 $x \simeq 10^{-5}$ に及ぶ幅広い測定可能な kinematic range を持つ。本論文では、small- x での e-p 散乱について、その摂動論的記述と最近の応用を review する。

目次

第 1 章 序論	2
第 2 章 物理的背景	3
2.1 深非弾性散乱 (DIS)	3
2.1.1 DIS process	3
2.1.2 Parton 模型と QCD	7
2.2 Factorization	10
2.2.1 gluon 放射からの寄与	10
2.2.2 Altarelli-Parisi 方程式	11
2.3 構造関数の NNLO 発展	13
第 3 章 Small- x における DIS	18
3.1 Regge 理論	18
3.2 QCD の高エネルギーでの振る舞い	20
3.2.1 漸近的極限 $Q^2 \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$	20
3.2.2 BFKL 方程式	22
3.3 Gluon saturation	28
3.3.1 BFKL から gluon saturation へ	28
3.3.2 Froissart bound と dipole-hadron 散乱	32
3.3.3 現象論への応用	35
第 4 章 まとめと今後	37

第1章 序論

electron-hadron collider を持つ HERA の主な目的は、hadron の構造を解明することである。inclusive な lepton-hadron 散乱断面積の測定は、hadron の下部構造を理解するために極めて重要である。早くから、深非弾性散乱 (DIS) 実験では、momentum transfer $Q^2 \sim 5 \text{ GeV}^2$ 、Bjorken $x \geq 0.1$ の領域で、hadron 構造関数 F_2 の scale 不変性を観測することで、hadron を点状粒子として理解することができた。続く一連の、neutrino 散乱実験等は、hadron が valence 及び sea quark から構成されているという Quark Parton Model を立証してきた。これら parton 同士の相互作用は、QCD (Quantum Chromodynamics) によって記述される。QCD は、1970 年代初頭から今日に至るまで数多くの検証が行われ、process ($e^+e^- \rightarrow \text{hadron}$) や jet production に対する total rate、さらに hadron 構造関数の scaling の破れ等、様々な現象を正確に記述している。

1992 年に HERA で報告された構造関数 $F_2(x, Q^2)$ の data は、 $x < 10^{-2}$ の領域で、 x の減少に伴う強い上昇を示した [19]。このような振る舞いは、QCD の漸近的極限において期待される。しかしながら、Altarelli-Parisi 方程式や BFKL のような QCD の linear な発展方程式でこうした挙動を理解できるかどうか、そしてその一方で、non-linear (parton recombination) として重大な効果が実際に存在するのかどうかは明らかではない。さらに、 Q^2 が典型的な hadron scale $\mathcal{O}(1 \text{ GeV}^2)$ で、この上昇が存続するののかもまたはっきりしない。例えば、Regge 理論は、small Q^2 のとき F_2 は x の関数として flat に振る舞う。既に HERA では、 $Q^2 > 10^3 \text{ GeV}^2$ 、Bjorken $x < 10^{-4}$ に至る、利用可能な kinematic range が広がっている。こうして、small- x における quark-gluon 相互作用の研究は、HERA での主要な課題の 1 つである。

本研究は、摂動 QCD に基づいた、small Bjorken- x における parton 分布関数の漸近的振る舞いに関する review である。構成は以下の通りである。第 2 章で、parton model と QCD について解説する。第 3 章では、QCD の漸近的振る舞いについて解説し、dipole model を例にその最近の応用に触れ、その物理的考察をする。最後に、まとめを第 4 章で行う。

第2章 物理的背景

摂動 QCD の正当性は、DIS における scaling の破れを測定することで評価できる。高エネルギーでの既知の hadron 散乱断面積を用いることで、理論の精度を試検できるだけでなく、parton の運動量分布関数を決定することもできる。この章では、まず 2.1 節で e-p の DIS process 及び 'naive' parton model について復習する。2.2 節では QCD が parton model の scale 特性をどのように修正し、そして scaling の破れが摂動論でどのように計算されるのか復習する。とくに massless 近似の摂動展開で、近年計算が終わりつつある、splitting function における 3loop (NNLO) までの理論形式を議論する。

2.1 深非弾性散乱 (DIS)

この節では、ep の深非弾性散乱が hadron 内部の parton 描像に対して、どのような解釈を与えているのか概観する。

2.1.1 DIS process

高エネルギー lepton の標的 hadron による散乱を考える。入射及び散乱後の lepton の 4 元運動量をそれぞれ k^μ , k'^μ 、標的 hadron (以下陽子を扱う) 及び交換される virtual photon の 4 元運動量をそれぞれ p^μ , $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$ とする (図 2.1)。

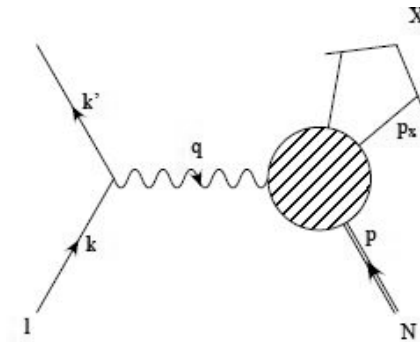


図 2.1: Deep inelastic charged lepton-hadron scattering

このときこの過程において標準的に用いられる変数は、

$$\begin{aligned}
Q^2 &= -q^2 \\
M^2 &= p^2 \\
\nu &= p \cdot q = M(E - E') \\
x &= \frac{Q^2}{2\nu} = \frac{Q^2}{2M(E - E')} \\
y &= \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = 1 - \frac{E'}{E}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで、 M は陽子の質量である。構造関数 F_i とは、virtual photon の運動量を解像度として target の構造を parametrize した、 x と Q^2 の関数である。e-p 散乱断面積に置き換えて定義すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma}{dx dy} &= \frac{8\pi\alpha^2 ME}{Q^2} \left[\left(\frac{1 + (1-y)^2}{2} \right) 2xF_1 \right. \\
&\quad \left. + (1-y)(F_2 - 2xF_1) - (M/2E)xyF_2 \right]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$p \rightarrow \infty$ の infinite momentum frame $p^\mu \approx (P, 0, 0, P)$ 、 $P \gg M$ では近似的に、

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[(1 + (1-y)^2)F_1 + \frac{(1-y)}{x}(F_2 - 2xF_1) \right] \tag{2.3}$$

が成立する（この frame では、hadron の質量は無視できる）。以降、運動量 $p_q^\mu = \xi p^\mu$ 、電荷 e_q を持った parton に関して parton level での散乱断面積がどのように記述できるか考える。process $e^-(k) + q(p_q) \rightarrow e^-(k') + q(p'_q)$ に対する散乱振幅の 2 乗は、

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}| = 2e_q^2 e^4 \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \tag{2.4}$$

ここで、 $\overline{\sum}$ は始(終)状態の colour と spin に関する平均であり、 $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ は parton level での 2 体散乱 process に対する Mandelstam 変数である。この結果を用いれば、

$$\frac{d^2\hat{\sigma}}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} [(1 + (1-y)^2)] \frac{1}{2} e_q^2 \delta(x - \xi) \tag{2.5}$$

が得られる。ここで on-shell 条件、

$$p_q'^2 = (p_q + q)^2 = q^2 + 2p_q \cdot q = -2p \cdot q(x - \xi) = 0 \tag{2.6}$$

を使った。(2.3) と (2.5) を比較すれば、

$$\hat{F}_2 = x e_q^2 \delta(x - \xi) = 2x \hat{F}_1 \tag{2.7}$$

これは、probe-lepton が fraction $\xi = x$ を持った標的 parton を叩いたことを示唆する。さて、再び図 2.1 に戻って、場の理論からどのようにこの結果が再現されるのか見ていこう。この過程に対する散乱振幅は、

$$\mathcal{A} = e\bar{u}(k')\gamma^\alpha u(k)\frac{1}{q^2}\langle X|j_\alpha(0)|P\rangle \quad (2.8)$$

ここで、 j_α は electromagnetic current である。photon の伝播函数に対して hadron 側の current は、複雑な構造を持っているため hadron tensor $W_{\alpha\beta}$ とおいて parametrize すれば、lepton tensor $L_{\alpha\beta}$ を用いて一般に、

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} \propto L_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

lepton tensor は QED より計算できて、

$$L_{\alpha\beta} = e^2 Tr[k'\gamma_\alpha k\gamma_\beta] = 4e^2(k_\alpha k'_\beta + k_\beta k'_\alpha - g_{\alpha\beta}k \cdot k') \quad (2.10)$$

hadron tensor は、

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(p, q) &= \frac{1}{4\pi} \sum_X \langle P|j_\beta^\dagger(0)|X\rangle \langle X|j_\alpha(0)|P\rangle (2\pi)^4 \delta^4(q + p - p_X) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^4z e^{iqz} \langle P|j_\beta^\dagger(z)j_\alpha(0)|P\rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^4z e^{iqz} \langle P|[j_\beta^\dagger(z), j_\alpha(0)]|P\rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。この結果を導くのに、終状態における完全性の条件を用いた。また、3 行目は力学変数の物理的領域を考慮すれば明らかである。一方、current の保存 $q \cdot W = 0$ から、

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta}(p, q) &= -(g^{\alpha\beta} - \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2})W_1(x, Q^2) + (p^\alpha + \frac{1}{2x}q^\alpha) \\ &\quad \times (p^\beta + \frac{1}{2x}q^\beta)W_2(x, Q^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.9) を使ってさらに (2.2) と比較すれば、

$$\begin{aligned} F_1(x, Q^2) &= W_1(x, Q^2) \\ F_2(x, Q^2) &= \nu W_2(x, Q^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

W の構造を調べるため、便宜上以下のように light-cone-vectors $p, n (p \cdot n = 1)$ を導入する。任意の 4 元 vector k は、 p, n で記述できる。

$$k^\mu = ap^\mu + bn^\mu + k_T^\mu \quad (2.14)$$

ここで、 $p^2 = n^2 = n \cdot k_T = p \cdot k_T = 0$ である。

$$\begin{aligned} P^\mu &= p^\mu + \frac{M^2}{2}n^\mu \\ q^\mu &= \nu n^\mu + q_T^\mu \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで、 $q_T^\nu = -q^2 = Q^2$ である。とくに proton が z 軸方向へ運動する infinite momentum frame では、

$$\begin{aligned} p^\mu &= (P, 0, 0, P) \\ n^\mu &= \left(\frac{1}{2P}, 0, 0, -\frac{1}{2P}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

よって (2.12)、(2.15) を使って次の関係が得られる。

$$\nu n^\alpha n^\beta W_{\alpha\beta} = \nu W_2 = F_2 \quad (2.17)$$

さて、photon が hadron 内の parton から量子力学的干渉を持たずに散乱される場合、hadron tensor は、

$$W^{\alpha\beta}(p, q) = e_q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\gamma^\alpha(\not{k} + \not{q})\gamma^\beta]_{ij} [B(k, p)]_{ji} \delta((k+q)^2) \quad (2.18)$$

ここで、 B は中間状態を表す振幅 (図 2.2 の斜線部分) であり、'naive' parton model の仮定は virtuality k^2 、または transverse momentum k_T^2 が大きいときは、強く damp するということである (言い換えれば B の効果は分布函数に押し付けるということ (2.22))。



図 2.2: Handbag diagram

quark の 4 元 vector k は、 p, n 及び transverse vector k_T を用いて、

$$k^\mu = \xi p^\mu + \frac{k^2 + k_T^2}{2\xi} n^\mu + k_T^\mu \quad (2.19)$$

'naive' parton model の仮定より delta 函数は、

$$\begin{aligned} \delta((k+q)^2) &= \delta(k^2 + 2\xi\nu - 2q_T \cdot k_T + q^2) \\ &\approx \delta(2\xi\nu - Q^2) = \frac{1}{2\nu} \delta(\xi - x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

こうして、

$$\nu W_2 \equiv F_2 = \frac{e_q^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\not{k}(\not{k} + \not{q})]_{ij} B_{ji}(k, p) \delta(\xi - x)$$

$$\begin{aligned}
&= e_q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\not{k}]_{ij} B_{ji}(k, p) \delta(\xi - x) \\
&\equiv e_q^2 x q(x)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

ここで quark 分布関数は、

$$q(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\not{k} B(k, p)] \delta(n \cdot k - x) \tag{2.22}$$

ゆえにこの仮定の下では構造関数は無次元の変数 x に scale する。

$$F_2(x, Q^2) \longrightarrow F_2(x) \tag{2.23}$$

Bjorken limit ($Q^2, \nu \rightarrow \infty$) では、構造関数は近似的にこの scaling に従うことがよく知られている [1]。

2.1.2 Parton 模型と QCD

前小節の 'naive' parton model がもたらす scaling の結果は、QCD では Q^2 の logarithms として破れる。物理的には quark が gluon を放出し、その反跳を受けて大きな transverse momentum k_T を獲得することに由来している。この小節では、one gluon emission $\gamma^*(q) + q(p) \rightarrow g(r) + q(l)$ について最低次の Feynman diagram (図 2.3) を計算し、scaling の破れがどのように現れるのか見ていくことにする。図 2.3 の process で 4 番目の diagram について考よう。

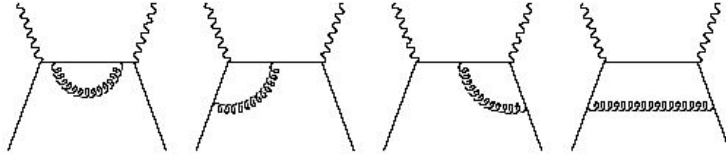


図 2.3: DIS へ寄与する real gluon emission diagram

2 体の Lorentz invariant phase space は、

$$d\Phi_2 = \int \frac{d^4r}{(2\pi)^3} \frac{d^4l}{(2\pi)^3} \delta^+(r^2) \delta^+(l^2) (2\pi)^4 \delta^4(p + q - r - l) \tag{2.24}$$

ここで p, k をそれぞれ initial および gluon 放出後の quark の内線の運動量とし、 $r = p - k, l = k + q$ である。ゆえに、

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4k \delta^+(p - k)^2 \delta^+(k + q)^2 \tag{2.25}$$

k は、 p, n 及び transverse vector k_T を用いて、

$$\begin{aligned} k^\mu &= \xi p^\mu + \frac{k_T^2 - |k^2|}{2\xi} n^\mu + k_T^\mu \\ d^4k &= \frac{d\xi}{2\xi} dk^2 d^2k_T \end{aligned} \quad (2.26)$$

よって delta 関数は、

$$\begin{aligned} (p-k)^2 &= (1-\xi) \frac{|k^2|}{\xi} - \frac{k_T^2}{\xi} \\ (k+q)^2 &= 2\xi\nu - Q^2 - |k^2| - 2q_T \cdot k_T \end{aligned} \quad (2.27)$$

以上から phase space は、

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= \frac{1}{16\nu\pi^2} \int d\xi dk^2 dk_T^2 d\theta \delta(k_T^2 - (1-\xi)|k^2|) \\ &\quad \times \delta(\xi - x - \frac{|k^2| + 2q_T \cdot k_T}{2\nu}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

一方対応する散乱振幅は、

$$\mathcal{M}^\alpha = -ig_e q \bar{u}(l) \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k}} \not{\epsilon} t^A u(p) \quad (2.29)$$

ここで t^A は colour matrix である。spin と colour に関して平均すれば、

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}|_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} e_q^2 g^2 \sum_{pol} C_F Tr[\gamma(\not{k} + \not{q}) \gamma^\alpha \not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{\epsilon}^* \not{k}] \frac{1}{k^4} \quad (2.30)$$

real gluon の polarization に関する和を次のようにとる。

$$\sum_{pol} \epsilon_\mu(r) \epsilon_\nu^*(r) = -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu r_\nu + n_\nu r_\mu}{n \cdot r} \quad (2.31)$$

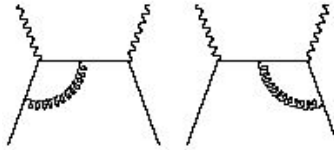


図 2.4: splitting function に寄与する diagram(左図) と axial gauge によって落とされる diagram(右図)

ここで、axial (物理的) gauge n は、図 2.4 の右側の diagram からの cross section への寄与を落とすように採用されていることに注意する。これは、gluon 放出後の quark を叩くという (図の左側の diagram) Altarelli-Parisi

の picture を反映している。

(2.31) の左から projection n をかけて多少計算すれば、

$$\frac{1}{4\pi} n^\alpha n^\beta \overline{\sum} |\mathcal{M}|_{\alpha,\beta}^2 = \frac{8e_q^2 \alpha_s}{|k^2|} \xi P(\xi) \quad (2.32)$$

ここで $P(\xi)$ は splitting function として知られている。これは、親の quark に対して運動量比 ξ をもった quark が、quark 内部に α_s の一次で存在する確立を意味する。

$$P(\xi) = C_F \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi} \quad (2.33)$$

k_T^2 と θ 積分を実行すれば、

$$\hat{F}_2 = e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \int_0^{2\nu} \frac{d|k^2|}{|k^2|} \int_{\xi_-}^{\xi_+} d\xi \frac{\xi P(\xi)}{\sqrt{(\xi_+ - \xi)(\xi - \xi_-)}} \quad (2.34)$$

ここで、

$$\xi_\pm(z, x) = x + z - 2zx \pm \sqrt{4x(1-x)z(1-z)} \quad (2.35)$$

但し $z = |k^2|/(2\nu)$ と定義した。 $\xi \sim \xi_+$, $\xi \sim \xi_-$ 付近が積分値へ最も大きく寄与する。また十分大きな Q^2 では $z \rightarrow 0$ すなわち $\xi_\pm \rightarrow x$ である。これらの近似の下で公式、

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} d\xi \frac{1}{\sqrt{(\xi_+ - \xi)(\xi - \xi_-)}} = \pi \quad (2.36)$$

を使えば、

$$\hat{F}_2 = e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} x P(x) \int_{\kappa^2}^2 \nu \frac{d|k^2|}{|k^2|} = e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} x P(x) \ln\left(\frac{2\nu}{\kappa^2}\right) \quad (2.37)$$

ここで "ˆ" は、ある特定の quark flavour における structure に着目することを意味する。一方 (図 (2.3)) の残りの diagram は有限の寄与を与える。これら 4 つの diagram と leading order からの寄与をまとめれば、

$$\hat{F}_2(x, Q^2) = e_q^2 x \left[\delta(1-x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(P(x) \ln \frac{Q^2}{\kappa^2} + C(x) \right) \right] \quad (2.38)$$

ここで $\ln(2\nu) = \ln Q^2 - \ln x$ の関係を使った。 $C(x)$ は有限の函数である。

すなわちこの order で対応する quark 分布函数は、

$$q(x, Q^2) = \delta(1-x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(P(x) \ln \frac{Q^2}{\kappa^2} + C(x) \right) \quad (2.39)$$

但し分布函数の完全な情報は、virtual gluon からの寄与を含まなければならないことに注意する。

$\ln Q^2$ という因子が現れたのは、'naive' parton model による構造函数の scaling の予言が破れたことを意味する。すなわち、QCD では F_2 は x の函数であると同時に、また Q^2 の函数でもある。これは gluon 放出の証拠である。

2.2 Factorization

この節では、前節での gluon 制動輻射が hadron の構造函数にどう寄与するのか定性的に概観する。

2.2.1 gluon 放射からの寄与

前節の結果を用いれば hadron の構造函数は、

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q_0(x) \left[\delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{Q^2}{\kappa} + \dots \right] \quad (2.40)$$

ここで q_0 は (2.38) の \hat{F}_2 に現れる quark の 'bare' distribution であり、これ自体は発散を伴う量である。また '...' は高次の order からの寄与である。発散を相殺させるように 'factorization scale' μ を導入し、'くり込まれた' 分布函数として $q(x, \mu^2)$ を次のように定義する。 $q(x, \mu^2)$ はそれ自身有限な量である。

$$q(x, \mu^2) = q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q_0(\xi) P\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{\mu^2}{\kappa} + \dots \quad (2.41)$$

これを q_0 について解き再び (2.40) へ代入し、 α_s の一次まで採用すると、

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, \mu^2) \left[\delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots \right] \quad (2.42)$$

分布函数 $q(x, Q^2)$ は強い相互作用の *long-distance* からの寄与を伴うため摂動計算することはできず、与えられた Q^2 における F_2 の値から決定される。

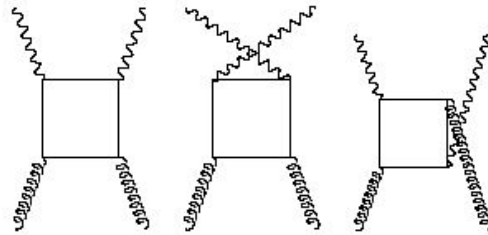


図 2.5: initial gluon が関与する DIS

分布函数の完全な記述を与えるためには、process $\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}$ (図 2.5) からの $O(\alpha_s)$ の寄与を含まなければならない。こうして (2.41) の分布函数は $O(\alpha_s)$ までで次のように書き換えられる。

$$q(x, \mu^2) = q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q_0(\xi) P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{\mu^2}{\kappa}$$

$$+\frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} g_0(\xi) P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{\mu^2}{\kappa} + \dots \quad (2.43)$$

さて、factorizationの方法は、logのsingularityを処理する方法の1つであるが有限の寄与を取り扱う際に、くり込みschemeの依存性も含んで、この方法には任意性があることに注意する。分布函数の解析においてとりわけ広く用いられているfactorization schemeにDIS-schemeと呼ばれる方法がある。これは分布函数におけるすべてのgluonからの寄与をquarkの分布函数に吸収させる方法である(次節で触れる)。また次元正則化に伴う寄与 $\ln(4\pi) - \gamma_E$ を発散する部分とともに分布函数に吸収させる方法を \overline{MS} schemeという。このschemeでは構造函数は、

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, Q^2) \left[\delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_q^{\overline{MS}}\left(\frac{x}{\xi}\right) + \dots \right] \\ + x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} g(\xi, Q^2) \left[\frac{\alpha_s}{2\pi} C_g^{\overline{MS}}\left(\frac{x}{\xi}\right) + \dots \right] \quad (2.44)$$

ここで $C_q(x), C_g(x)$ はfactorizationおよびくり込みschemeに依存する函数で係数函数と呼ばれる。DIS-schemeではすべてのnon-leading orderで係数函数はゼロである。

2.2.2 Altarelli-Parisi 方程式

さて、構造函数の値はfactorization scale $t \equiv \mu^2$ には依らない筈である。言い換えれば構造函数(2.42)を μ^2 で偏微分すればゼロにならなければならない。すなわち、

$$t \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)\right) q(\xi, t) \quad (2.45)$$

これはAltarelli-Parisi方程式として知られている。ここでstrong coupling constantが t の函数として導入されていることに注意する。(2.45)は演算子積展開とくり込み群方程式に基づいた取り扱いによって正当化されるがここでは触れないことにする。coupling constantによる函数 P_{qq} の摂動展開は、

$$P_{qq}(z, \alpha_s) = P_{qq}^{(0)}(z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}^{(1)}(z) + \dots \quad (2.46)$$

さらに一般的にAltarelli-Parisi方程式はquark、antiquark、gluonにおける分布函数の行列方程式として、

$$t \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q_i(x, t) \\ g(x, t) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \sum_{q_j, \bar{q}_j} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \\ \times \begin{pmatrix} P_{q_i q_j}\left(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)\right) & P_{q_i g}\left(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)\right) \\ P_{g q_j}\left(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)\right) & P_{g g}\left(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j(\xi, t) \\ g(\xi, t) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

leading-order からの寄与は [2]、

$$\begin{aligned}
P_{qq}^{(0)}(x) &= C_F \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right] \\
P_{qg}^{(0)}(x) &= \frac{1}{2} \left[x^2 + (1-x)^2 \right] \\
P_{gq}^{(0)}(x) &= C_F \left[\frac{1+(1-x)^2}{x} \right] \\
P_{gg}^{(0)}(x) &= 6 \left[\frac{1-x}{x} + \frac{x}{(1-x)_+} + x(1-x) \right] \quad (2.48)
\end{aligned}$$

ここで '+' は f をなめらかな任意函数として次のように正則化する。

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x} \quad (2.49)$$

next-leading-order 以降からの寄与は、可能な diagram の数が膨大なため代数的 programme "Schoonschip" 等で計算される。

しばしば発展方程式は、分布函数の moment (Mellin 変換) で置き換えて表現することがある。

$$f(j, t) = \int_0^1 dx x^{j-1} f(x, t), \quad f = q_i, g \quad (2.50)$$

このとき non-singlet 分布函数 (flavour-non-singlet、singlet については次節参照) は、

$$t \frac{\partial}{\partial t} q_{NS}(j, t) = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \gamma_{qq}(j, \alpha_s(t)) q_{NS}(j, t) \quad (2.51)$$

ここで anomalous dimension γ_{qq} は次式で与えられる。

$$\gamma_{qq}(j, \alpha_s) = \int_0^1 dx x^{j-1} P_{qq}(x, \alpha_s) \quad (2.52)$$

singlet 分布函数についても同様に、

$$\begin{aligned}
& t \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Sigma(j, t) \\ g(j, t) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \\
& \times \begin{pmatrix} \gamma_{qq}(j, \alpha_s(t)) & 2N_f \gamma_{qg}(j, \alpha_s(t)) \\ \gamma_{gq}(j, \alpha_s(t)) & \gamma_{gg}(j, \alpha_s(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(j, t) \\ g(j, t) \end{pmatrix} \quad (2.53)
\end{aligned}$$

このように moment をとることによって、もともと発展方程式の右辺にあった convolution 積分が簡単な積に置き換えられたことに注意する。こうすることで方程式の解析的な取り扱いを簡単にできる。

leading-order anomalous dimension の moment 数 j における依存性について、(2.48)、(2.54) より次のことが言える。anomalous dimension は、 $j = 1$ で極を持ち、 γ_{qq}, γ_{gg} は大きな j のとき $\ln j$ で増加する。さらに、 γ_{qg}, γ_{gq} は

$j \rightarrow 1$ で発散する。これは構造関数の small- x での振る舞いに対する重要な示唆であり、これについては次章で述べる。

$$\int_0^1 dx x^{j-1} \frac{1}{x} = \frac{1}{j-1}$$

$$\int_0^1 dx x^{j-1} \frac{1}{(1-x)_+} = -\int_0^1 dx \frac{x^{j-1}-1}{x-1} \sim -\ln j, \quad \text{for } j \rightarrow \infty$$

(2.54)

この小節を要約すると、QCD は scaling の破れを予言し、構造関数の Q^2 依存性を具体的に計算することができる。ある参照値 $Q^2 = Q_0^2$ における構造関数が与えられると、Altarelli-Parisi 方程式を用いて、任意の Q^2 に対して $q(x, Q^2)$ を計算することができる。

物理的には、quark と gluon の不確定性関係による相互作用伝播距離の広がり、運動量 Q の virtual photon に対して $O(Q^{-1})$ である。よって、photon はその size の parton と相互作用すると考えられる。そうすると、より大きな運動量 (Q') の photon はより小さい size の parton と相互作用することになる。こうして Q^{-1} の size の parton よりもさらに内部の parton を見ることができる。 Q^2 の増大とともにより size の小さい parton を見るので、Bjorken x のより小さな parton が寄与する。これは scaling の破れを直感的に説明している (図 2.6)。

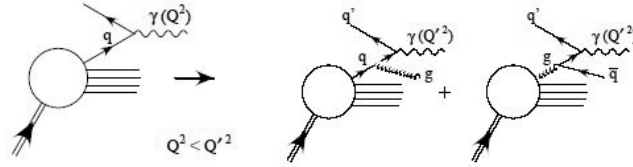


図 2.6: $Q^2 < Q'^2$ の関係. scaling の破れを直感的に理解できる。

2.3 構造関数の NNLO 発展

parton 分布関数の決定において、 Q^2 の値および高次摂動項が理論の曖昧性として付きまとっている。近年 three-loop splitting function の計算が成されており、理論の曖昧さを減らす懸命な努力がされている。

この節では、最近の論文 [3][4] を追って、non-singlet および singlet それぞれの場合における NNLO の理論形式を復習する。

分布関数の non-singlet および singlet の組み合わせはそれぞれ次のように定

義される。

$$\begin{aligned}
q_{NS}(x, \mu_f^2, \mu_r^2) &= \sum_{i=1}^{N_f} (q_i(x, \mu_f^2, \mu_r^2) - \bar{q}_i(x, \mu_f^2, \mu_r^2)) \\
\Sigma(x, \mu_f^2, \mu_r^2) &= \sum_{i=1}^{N_f} [q_i(x, \mu_f^2, \mu_r^2) + \bar{q}_i(x, \mu_f^2, \mu_r^2)]
\end{aligned} \tag{2.55}$$

ここで μ_r 、 μ_f はそれぞれ、くり込みおよび factorization scale である。

寄与する parton をすべて加え合わせれば、hadron の量子数を再現できる筈である。したがって、 N_v を valence quark の数として、quark 数の保存および運動量保存則はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \sum_{i=1}^{N_f} [q_i(x) - \bar{q}_i(x)] &= N_v \\
\int_0^1 dx x \sum_{i=1}^{N_f} [\Sigma(x) + g(x)] &= 1
\end{aligned} \tag{2.56}$$

ここで sea parton は quark· anti-quark 対から成り、hadron の量子数には影響しないので、数に対する和則は正しく成立していることに注意するべきである。

さて、non-singlet の場合から考えることにする。対応する Altarelli-Parisi 方程式は、

$$\frac{d}{d \ln \mu_f^2} q_{NS}(x, \mu_f^2, \mu_r^2) = \left[P_{NS} \left(\alpha_s(\mu_r^2), \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2} \right) \otimes q_{NS}(\mu_f^2, \mu_r^2) \right] (x) \tag{2.57}$$

ここで \otimes は畳込み積分 (Mellin convolution) を意味する。

$$[a \otimes b](x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} a(y) b\left(\frac{x}{y}\right) \tag{2.58}$$

P_{NS} の α_s における 3 次の order (NNLO) までの展開を得るためには、 α_s の scale 依存性を知っていなければ成らない。現在それは 4 次の展開まで知られていて、

$$\frac{d\alpha_s}{d \ln \mu_r^2} = \beta(\alpha_s) = - \sum_{l=0} \alpha_s^{l+2} \beta_l \tag{2.59}$$

これを積分して必要な 3 次まで求めれば、

$$\alpha_s(\mu_f^2) = \alpha_s(\mu_r^2) \left[1 + \alpha_s(\mu_r^2) \beta_0 \ln \frac{\mu_r^2}{\mu_f^2} + \alpha_s^2(\mu_r^2) \left(\beta_1 \ln \frac{\mu_r^2}{\mu_f^2} + \beta_0^2 \ln^2 \frac{\mu_r^2}{\mu_f^2} \right) \right] \tag{2.60}$$

この結果を用いれば P_{NS} の NNLO までの展開は、

$$P_{NS} \left(x, \alpha_s(\mu_r^2), \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2} \right) = \alpha_s(\mu_r^2) P_{NS}^{(0)}(x) + \alpha_s^2(\mu_r^2) \left(P_{NS}^{(1)} - \beta_0 P_{NS}^{(0)} \ln \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_s^3(\mu_r^2)\left(P_{NS}^{(2)}(x) - \{\beta_1 P_{NS}^{(0)}(x) + 2\beta_0 P_{NS}^{(1)}(x)\} \ln \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) \\
& +\beta_0^2 P_{NS}^{(0)}(x) \ln^2 \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2} + \dots
\end{aligned} \tag{2.61}$$

また non-singlet における構造関数は、

$$F_{2,NS}(x, Q^2) = \left[\mathcal{C}_{NS}\left(\alpha_s(\mu_r^2), \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) \otimes q_{NS}(\mu_f^2, \mu_r^2) \right](x) \tag{2.62}$$

これを $\ln \mu_f^2$ で微分して (2.61) を使えば、次のように係数関数 \mathcal{C} を求めることができる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{NS}\left(x, \alpha_s(\mu_r^2), \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) &= \delta(1-x) + \alpha_s(\mu_r^2)\left(c_{NS}^{(1)}(x) + P_{NS}^{(0)}(x) \ln \frac{Q^2}{\mu_f^2}\right) \\
& +\alpha_s^2(\mu_r^2)\left(c_{NS}^{(2)}(x) + \{P_{NS}^{(1)}(x) + [P_{NS}^{(0)}(x) \otimes c_{NS}^{(1)}(x)]\} \ln \frac{Q^2}{\mu_f^2}\right. \\
& -\beta_0 c_{NS}^{(1)}(x) \frac{Q^2}{\mu_r^2} + \frac{1}{2}\{[P_{NS}^{(0)} \otimes P_{NS}^{(0)}](x) - \beta_0 P_{NS}^{(0)}(x)\} \ln^2 \frac{Q^2}{\mu_f^2} \\
& \left. -\beta_0 P_{NS}^{(0)}(x) \ln \frac{Q^2}{\mu_f^2} \ln \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) + \dots
\end{aligned} \tag{2.63}$$

実際のところ non-singlet 分布関数の scale 依存性、 $dq_{NS}/d \ln \mu_f^2$ への $P_{NS}^{(2)}$ (NNLO) の寄与は、 x の値に対しておおそ一様に、 $\alpha_s = 0.2$ ($Q^2 \simeq 25 \sim 50 \text{ GeV}^2$) の場合で 2% 程度である。この補正は、hadron の構造に寄与する quark flavour の数、とりわけ charm quark の適切な取り扱いを示唆する。

さて、次に singlet の場合を考える。対応する Altarelli-Parisi 方程式は、

$$\begin{aligned}
& t \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Sigma(x, t) \\ g(x, t) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \\
& \times \begin{pmatrix} P_{qq}(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)) & 2N_f P_{qg}(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)) \\ P_{gq}(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)) & P_{gg}(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(\xi, t) \\ g(\xi, t) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

このとき対応する構造関数は、

$$\begin{aligned}
F_{2,S}(x, Q^2) &= \left[\mathcal{C}_q\left(\alpha_s(\mu_r^2), \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) \otimes \Sigma(\mu_f^2, \mu_r^2) \right. \\
& \left. + \mathcal{C}_g\left(\alpha_s(\mu_r^2), \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) \otimes g(\mu_f^2, \mu_r^2) \right](x) \\
& \equiv \left[\mathcal{C}\left(\alpha_s(\mu_r^2), \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) \otimes \mathbf{q}(\mu_f^2, \mu_r^2) \right](x)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

ここで係数関数、

$$\mathcal{C}\left(x, \alpha_s(\mu_r^2), \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) = \mathcal{C}^{(0)}(x) + \alpha_s(\mu_r^2) \mathcal{C}^{(1)}\left(x, \frac{Q^2}{\mu_f^2}\right)$$

$$+\alpha_s^2(\mu_r^2)C^{(2)}\left(x, \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) + \alpha_s^3(\mu_r^2)C^{(3)}\left(x, \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}\right) + \dots \quad (2.66)$$

において、各摂動項は、non-singlet のときと同じ流儀にしたがって計算できる。その結果は [4] を参照されたい。

singlet の場合、分布函数の scale 依存性に対する NNLO の寄与は、 $x \simeq 0.2$ のとき、 $\alpha_s = 0.2$ で 2% に満たない。しかしながらここで $P_{qq}^{(2)}, P_{qg}^{(2)}, P_{gg}^{(2)}$ は、small- x に対して特異な項 $x \ln(1/x)$ を含んでいることに注意しなければならない。実際、実験的に手の届く small- x の値 $x \simeq 10^{-3}$ に対しては scale 依存性を摂動的に取り扱うのは難しい (図 2.7 参照)。small- x の取り扱いには次章で議論する。

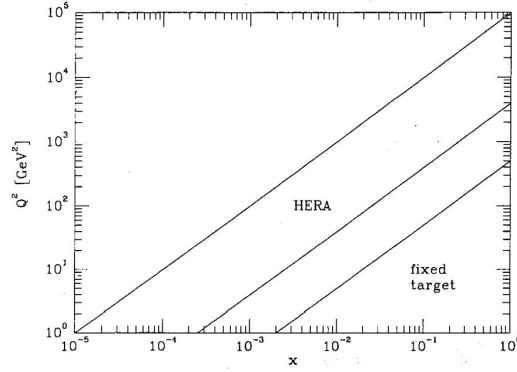


図 2.7: DIS-process における HERA で可能な kinematic region

ところで、係数函数や β の値は一般的に \overline{MS} くり込みおよび factorization scheme で計算される。しかし分布函数の解析において、通常おこなわれる手続きは、factorization scheme としていったん DIS-scheme から分布函数を決定し、その後 \overline{MS} -scheme へ変換する方法を採る。この節の締めくくりとして、scheme の変換について定性的に述べることにする。なお以降 $\mu_r^2 = \mu_f^2 = Q^2$ を採用する。

前節でも述べたように DIS-scheme の定義は、

$$\tilde{c}_q^{(l)} \equiv \tilde{c}_g^{(l)} = 0, \quad l \geq 1 \quad (2.67)$$

すなわち構造函数は、 $F_{2,S}(x, Q^2) = \tilde{\Sigma}(x, Q^2)$ で与えられる。ここで DIS-scheme によって計算された量を tilde であらわすことにする。また係数函数は $\mu_r^2 = \mu_f^2$ より、

$$C = c^{(0)}(x) + \sum_{l=1}^3 \alpha_s^l \left(c^{(l)}(x) + \sum_{m=1}^l c^{(l,m)}(x) \ln^m \frac{Q^2}{\mu_f^2} \right) + \dots \quad (2.68)$$

対応する singlet 分布関数を次のように定義することができる。

$$\tilde{\mathbf{q}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma} \\ \tilde{g} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{1} + \sum_{l=1} \alpha_s^l \begin{pmatrix} c_q^{(l)}(x) & c_g^{(l)}(x) \\ -c_q^{(l)}(x) & -c_g^{(l)}(x) \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \Sigma \\ g \end{pmatrix} \equiv \mathbf{Z} \otimes \mathbf{q} \quad (2.69)$$

このとき各行列要素が不定性を持つことに注意する。この不定性を取り除くため moment の次数 N に対して次の条件を課す。

$$\tilde{\Sigma}(N) + \tilde{g}(N) = \Sigma(N) + g(N) \quad (2.70)$$

ここで、

$$a(N) \equiv \int_0^1 dx x^{N-1} a(x) \quad (2.71)$$

要するに、 $N = 2$ のときは分布関数の意味を失わないように (2.56) を再現し、残りの N に対する不定性も便宜上同じ和則が成立するような条件を課した。

ところで、 $\tilde{\mathbf{q}}$ に対する Altarelli - Parisi 方程式と (2.69) から次の関係が得られる。

$$\tilde{\mathbf{P}} = \left(\mathbf{Z} \otimes \mathbf{P} + \beta \frac{d\mathbf{Z}}{d\alpha_s} \right) \otimes \mathbf{Z}^{-1} \quad (2.72)$$

scheme 変換による splitting function の不定性が括弧中の第 2 項に現れている。また α_s の次数を数えればすぐにわかるように、scheme 変換に要求される係数関数 \mathbf{Z} の摂動は splitting function \mathbf{P} の摂動より 1 次低いことがわかる。

第3章 Small- x におけるDIS

前章でも見てきたように、momentum scale Q^2 の大きな領域では、摂動が安全であるため、第一原理から解析的に物理量を計算することが可能である。しかし、momentum scale が小さくなれば、 α_s が大きくなり摂動論が扱えない。Regge 理論は、強い相互作用の場の量子論的記述が不可能であると考えられていた、QCD 以前に起源を持つ散乱振幅の数学的解析性に基づいた理論形式である。

この理論は、 $Q^2 \simeq 0 \sim 2000\text{GeV}^2$ に至る、あらゆる small- x の data に対して、成功を遂げている [5]。本章ではまずこの理論形式を復習し、そして QCD がどのように Regge 理論を再現するのか概観する。また、hadronic cross-section の高エネルギーでの振る舞いとして CGC の話題を取り上げ、最後にその現象論への応用を見ていく。

3.1 Regge 理論

量子力学でよく知られているように、散乱振幅の部分波展開は Legendre 多項式による展開である。これを t -channel の物理的領域 ($t > 4m^2, s < 0, u < 0$) で展開すれば、

$$A(\nu, t, Q^2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(t, Q^2) P_l(\cos \theta_t) \quad (3.1)$$

ここで $x = Q^2/2\nu$ であり ν は次式にしたがう。

$$\cos \theta_t = -\frac{\nu - \frac{1}{4}t}{\sqrt{(\frac{1}{4}t + Q^2)(\frac{1}{4}t - m^2)}} \quad (3.2)$$

いま、散乱振幅を複素変数 l の関数とみなし、(3.1) を Cauchy の定理を使って複素 l 平面での周回積分で現せば (Sommerfeld-Watson 変換)、

$$A_l(\nu, t, Q^2) = \frac{1}{2i} \int_C \frac{(2l+1)P_l(-\cos \theta_t)}{\sin \pi l} a(l, t, Q^2) \quad (3.3)$$

すなわち l, α は複素数であるから、定義域を $t < 0, s > 0$ へ拡張しても収束性は失われず、 s -channel への解析接続を可能にしている。ここで積分路 C はゼロと正の整数のみを含む図 3.1 のような経路であり、 $1/\sin \pi l$ の留数は



図 3.1: 複素 l 平面における積分路 C

$(-1)^l/\pi$ であることに注意する。また $A_l(t, Q^2) \equiv a(l, t, Q^2)$ は $l \rightarrow \infty$ では damp し、 $\text{Re } l > N(t)$ では特異性を持たず、しかも複素 l 平面 (右半面) 上で孤立特異性をもつ函数とする。実際、分岐点からの small- x における構造函数 F_2 への寄与は孤立特異点と比べて非常に小さいことが確かめられている [5]。

このとき積分路を図 3.1(a) から (b) へ変更させれば、 $\text{Re } l > N(t)$ では特異点を横切ることになる。そして $P_l(\cos \theta_t)$ の性質はよくわかっているため、経路 C が、 $\text{Re } l > -1/2$ である限りは収束性がよいことが導ける。 $a(l, t, Q^2)$ が $l = \alpha(t)$ に極を持てば、

$$a(l, t, Q^2) \sim \frac{\beta(Q^2, t)}{l - \alpha(t)} \quad (3.4)$$

このとき積分値への主な寄与は、

$$\frac{\pi \beta(Q^2, t) P_{\alpha(t)}(\cos \theta_t)}{\sin \pi \alpha(t)} \quad (3.5)$$

いま、 $|\cos \theta_t| \rightarrow \infty$ (したがって (3.2) より $s \rightarrow \infty$ となるがこれは超前方散乱 $t \sim 0$ に対応する) のとき、関係、 $P_l(z) \sim z^l$ を使えば光学定理より散乱断面積が計算できて、

$$\sigma^{tot} = \frac{\text{Im} A(s, Q^2, t=0)}{s} = s^{\alpha(0)-1} \quad (3.6)$$

ゆえに構造函数 F_2 の漸近的振る舞いがわかる。

$$F_2(x, Q^2) \sim f(Q^2) x^{1-\alpha(0)} \quad (3.7)$$

ここで函数 $f(Q^2)$ における定量的な情報は、Regge 理論からは得ることはできない。これは large- Q^2 において、Altarelli-Parisi 方程式に従って発展が記述される。すなわち複素 l 平面における特性が Q^2 によって変わらないということが Regge 理論の制約である。さて、一般に経路 C がいくつかの極を横切っていることを考慮すれば (3.7) は、

$$F_2(x, Q^2) \sim \sum_{i=0}^2 f_i(Q^2) x^{-\epsilon_i} \quad (3.8)$$

高エネルギーでの散乱断面積の振る舞いは、 ρ, ω, f などの交換項 (reggeon) と、これに pomeron 交換項を付け加えればすべての反応をほぼ再現できる。

$\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ はそれぞれ以下の値を持ち、pomeron 交換項は flavour-singlet (quark sea)、reggeon は flavour-nonsinglet (valence quark) と解釈できて、それぞれ、どれほど構造関数へ寄与しているのか一目瞭然である。

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &\approx 0.4 && \text{(hard pomeron exchange)} \\ \epsilon_1 &\approx 0.08 && \text{(soft pomeron exchange)} \\ \epsilon_2 &\approx -0.45 && (\rho, \omega, f, \dots \text{ exchange})\end{aligned}\tag{3.9}$$

構造関数が small- x で、 Q^2 の増加とともに上昇するのは、Altarelli-Parisi 方程式によって記述される摂動的発展によって引き起こされる。このとき Regge 理論は、hadron scale 1GeV^2 付近 (摂動が扱えない領域) で、その摂動的発展に対する starting-distribution を与える。実際 F_2 は small- x で、QCD の予想と矛盾することなく $\ln Q^2$ とともに線形に上昇する [6]。

3.2 QCD の高エネルギーでの振る舞い

前節で見てきたように $x \rightarrow 0$ の極限では、高エネルギーにおける散乱断面積の振る舞いは Regge 理論によって関係づけられる。この背景は hadron scale、 $Q^2 \sim 1\text{GeV}^2$ での分布関数に対応し、非摂動領域を取り扱っている。以降の節では、いくつかの近似の下で、摂動論に基づいた分布関数の small- x での振る舞いを議論する。

3.2.1 漸近的極限 $Q^2 \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$

$Q^2 \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$ の漸近的極限では、直接 Altarelli-Parisi 方程式から分布関数の振る舞いを決定することが可能である。この小節では、Altarelli-Parisi 方程式の leading-logarithmic order の解を求める。これは double-leading-logarithm approximation (DLA) として知られている。この極限に対応する x - Q^2 平面を (図 3.2) に示す。

前章 (2.54) からわかるように、 $x \rightarrow 0$ での分布関数は anomalous dimension $\gamma(j)$ の $j \rightarrow 1$ 付近の振る舞いによって支配され、small- x での分布関数の発展に大きく寄与する。いま簡単のために、(2.53) において gluon 分布関数の発展のみを考える。

$$t \frac{\partial}{\partial t} g(j, t) = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \gamma_{gg}^{(0)}(j) g(j, t)\tag{3.10}$$

N を colour の数として (2.54) より、

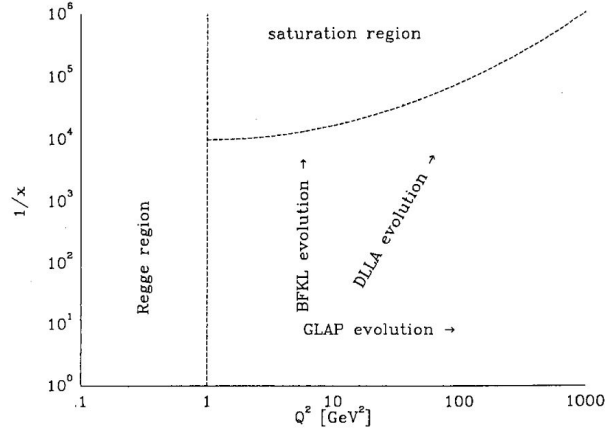


図 3.2: $1/x-Q^2$ 平面

$$\gamma_{gg}^{(0)}(j) \approx \frac{2N}{j-1} \quad (3.11)$$

この極限の下では直ちに微分方程式は解けて、分布函数の moment は、

$$g(j, t) = g(j, t_0) \exp\left(\frac{\xi}{j-1}\right) \quad (3.12)$$

ここで ξ を次のように定義した。

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{N}{\pi} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{t'} \alpha_s(t') = \frac{N}{\pi b} \ln\left(\frac{\ln t/\Lambda^2}{\ln t_0/\Lambda^2}\right) \\ \alpha_s(Q^2) &= \frac{1}{b \ln Q^2/\Lambda^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

逆 Mellin 変換を実行して x -space に戻れば、

$$\begin{aligned} xg(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int dj x^{-(j-1)} g(j, t) \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int dj g(j, t_0) \exp[f(j)] \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで f は、

$$f(j) = (j-1)Y + \frac{\xi}{j-1}, \quad Y \equiv \ln \frac{1}{x} \quad (3.15)$$

いま考えている極限では Y, ξ は漸近的に大きな値を持つので、積分を鞍点で近似すれば、

$$f(j) = 2\sqrt{\xi Y} + \mathcal{O}(j-j_0)^2, \quad j_0 = 1 + \sqrt{\frac{\xi}{Y}} \quad (3.16)$$

すなわち漸近解は、

$$xg(x, t) = g(j_0, t_0) \exp(2\sqrt{\xi Y}) \quad (3.17)$$

変数を元に戻して、

$$g(x, \mu^2) \sim \frac{1}{x} \exp \sqrt{\frac{4N}{\pi b} \ln \frac{\ln \mu^2 / \Lambda^2}{\ln \mu_0^2 / \Lambda^2} \ln \frac{1}{x}}, \quad b = \frac{(33 - 2N_f)}{12\pi} \quad (3.18)$$

分布関数は、starting distribution $g(j_0)$ (すなわち $j = j_0$ のときの g の moment) における依存性を持ち、また上の結果は、starting distribution が $x \rightarrow 0$ で強い特異性を持つときには破綻していることに注意する。とくに starting distribution が強く steep であるとき、これは物理的には、small- x における摂動的な分布関数の上昇を引き起こす、十分大きな運動量を持った gluon はもはや存在しないということである。

small- x における gluon distribution の上昇は (3.18) から理解できるが、その主な特徴は、構造関数 F_2 が $x^{-\lambda}$ で振る舞うことである。たとえば、 $\alpha_s \sim 0.2$ のとき $\lambda \approx 0.5$ であるが、これは前節で与えられた hard pomeron exchange からの寄与に対応する。図 3.3 は fixed Q^2 に対する λ の値である [7]。

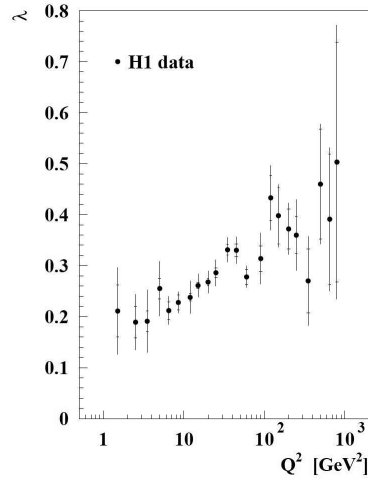


図 3.3: fixed $Q^2, x < 0.1$ での $F_2 \sim x^{-\lambda}$ における指数 λ の変動 [7]

3.2.2 BFKL 方程式

前小節の議論は、 $1/x$ と Q^2 が共に大きな極限を持つときにふさわしい。すなわち、DLLA は leading power $(\alpha_s \ln(1/x) \ln Q^2)^n$ に対する総和であり、gluon 分布関数は $\ln(1/x)$ の $x \rightarrow 0$ による single-log の power よりいっそう

早く上昇する。むしろ Altarelli-Parisi 方程式が multigluon emission に関する $\ln Q^2$ の single-log にわたる leading power の総和に対応していることは言うまでもない。

一方 HERA では、small- x での Q^2 の値はあまり大きくないため、 $\ln Q^2 \ll \ln(1/x)$ に対応する resummation を考える必要がある。このとき散乱断面積への主な寄与は、single-log、 $(\alpha_s \ln 1/x)^n$ による leading term から生じている (図 2.7)。明らかに Altarelli-Parisi 方程式は、この極限を取り扱うにはふさわしくない。この resummation を実現するのが BFKL 方程式と呼ばれるものである。物理的には、これら leading log の補正は、strong-ordered gluon ladder からの寄与と考えることができる (図 3.4)。すなわち $(\alpha_s \ln Q^2)^n$ の single-log は、

$$\int^{Q^2} \frac{dk_{T,n}^2}{k_{T,n}^2} \dots \int^{k_{T,3}^2} \frac{dk_{T,2}^2}{k_{T,2}^2} \int^{k_{T,2}^2} \frac{dk_{T,1}^2}{k_{T,1}^2} \sim \frac{[\ln Q^2]^n}{n!} \quad (3.19)$$

に起源を持つ。ゆえに Altarelli-Parisi 方程式は、parton transverse momentum $k_{T,i}$ の strong-ordering を予言するのに対して、BFKL 方程式は、この ordering が十分緩和され、longitudinal momentum x_i に strong-ordering を持つ。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{DGLAP:} \quad & x = x_n < x_{n-1} < \dots < x_1, \quad Q^2 = k_{T,n}^2 \gg k_{T,n-1}^2 \gg \dots \gg k_{T,1}^2 \\ \text{BFKL:} \quad & x = x_n \ll x_{n-1} \ll \dots \ll x_1, \quad \text{No ordering in } k_T \end{aligned}$$

以上の背景を踏まえて、この小節では BFKL 方程式を第一原理から導出する [8]。いま、運動量がそれぞれ、 k_1, k_2, \dots, k_{n+1} 、の quark、 n 個の gluon および、

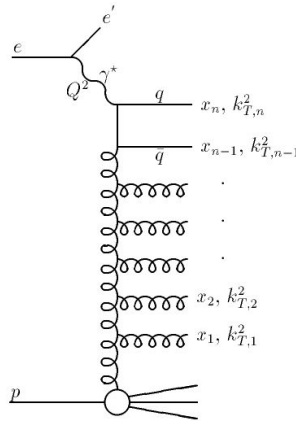


図 3.4: DIS における gluon ladder diagram

$k_0 = p - k_1 - \dots$ の antiquark から成る、運動量 p を持つ quarkonium (heavy quark-antiquark 対の bound state) の波動関数 $\psi^{(n)}$ を考える。

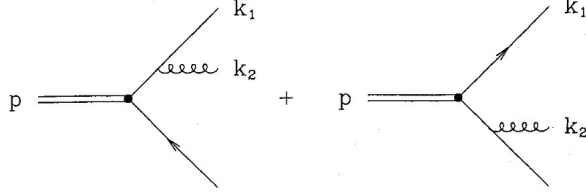


図 3.5: $q\bar{q}g$ に対する Feynman diagram

図 3.5 によって表現される、0-gluon と 1-gluon の波動関数は Feynman diagram による通常の手続きから、

$$\psi^{(1)}(k_1, k_2) \sim gt^A \left[\psi^{(0)}(k_1 + k_2) \frac{k_1 \cdot \epsilon_2}{k_1 \cdot k_2} - \psi^{(0)}(k_1) \frac{k_0 \cdot \epsilon_2}{k_0 \cdot k_2} \right] \quad (3.20)$$

以下、前章でも用いた light-cone の記述を扱うことにする。

$$k_i = x_i p + y_i n + k_{Ti}, \quad \epsilon_i = \omega_i n + \epsilon_{Ti} \quad (3.21)$$

ここで、 $p = (P, 0, 0, P)$, $n = (1/(2P), 0, 0, 1/(2P))$, $k_T = (0, k_x, k_y, 0)$ である。とくに quarkonium の質量が無視できることに注意する。on-shell 条件 $|k_i|^2 = 0$ および free gluon field は横方向の偏極しか持たない ($k_i \cdot \epsilon_i = 0$) ので、 $k_T = (0, \mathbf{k}, 0) \equiv (0, k_x, k_y, 0)$, $\epsilon_T = (0, \boldsymbol{\epsilon}, 0) \equiv (0, \epsilon_x, \epsilon_y, 0)$ と書いて、

$$y_i = \frac{\mathbf{k}_i^2}{2x_i}, \quad \omega_i = \frac{\mathbf{k}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i}{x_i} \quad (3.22)$$

このとき $x_2 \ll x_1, (1 - x_1)$ の近似 (soft gluon) の下で (3.20) は、

$$\psi^{(1)}(x_1, \mathbf{k}_1, x_2, \mathbf{k}_2) \sim 2gt^A [\psi^{(0)}(x_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) - \psi^{(0)}(x_1, \mathbf{k}_1)] \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2}{\mathbf{k}_2^2} \quad (3.23)$$

さて、(3.23) を簡単にするため次のように、 \mathbf{k}_i から (impact parameter) \mathbf{b}_i -space へ Fourier 変換を行う。

$$\tilde{\psi}^{(n-1)}(x_1, \mathbf{b}_1 \dots x_n, \mathbf{b}_n) \int \prod_{i=1}^n \frac{d^2 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} e^{i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{b}_i} \psi^{(n-1)}(x_1, \mathbf{k}_1 \dots x_n, \mathbf{k}_n) \quad (3.24)$$

こうして多少の計算の末、

$$\tilde{\psi}^{(1)}(x_1, \mathbf{b}_1, x_2, \mathbf{b}_2) = \frac{ig}{\pi} t^A \tilde{\psi}^{(0)}(x_1, \mathbf{b}_1) \left(\frac{\mathbf{b}_{21}}{b_{21}^2} - \frac{\mathbf{b}_{20}}{b_{20}^2} \right) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 \quad (3.25)$$

ここで、 $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$ ($\mathbf{b}_0 = 0$) とおいた。ゆえに、2 乗して colour および polarization についての和をとれば、

$$|\tilde{\psi}^{(1)}|^2 = 4C_F \frac{\alpha_s}{\pi} |\tilde{\psi}^{(0)}|^2 \frac{b_{10}^2}{b_{20}^2 b_{21}^2} \quad (3.26)$$

このとき以下の結果を用いた。

$$\frac{1}{b_{21}^2} + \frac{1}{b_{20}^2} - 2 \frac{\mathbf{b}_{21} \cdot \mathbf{b}_{20}}{b_{21}^2 b_{20}^2} = \frac{b_{10}^2}{b_{20}^2 b_{21}^2} \quad (3.27)$$

以上の準備の下 *inclusive* gluon 分布函数 $\tilde{\mathcal{G}}(x, b_{10}^2; x_1)$ の $\ln x$ 依存性を計算する。ここで *inclusive* とは、輻射されたすべての gluon にわたって和をとることを意味する。Altarelli-Parisi 方程式 (分布函数の Q^2 発展) を導出したときと同じ方法で、函数 $\tilde{\mathcal{G}}$ に対する微分方程式を構築する。

さて、quark momentum fraction が δx_1 だけ増加したときの $\tilde{\mathcal{G}}$ の変化、 $\delta \tilde{\mathcal{G}}$ について考える。(図 3.6) はこの状況を模式的に現している。元々の dipole \mathbf{b}_{10} が \mathbf{b}_{20} と \mathbf{b}_{21} に置き換わっているのがわかる。このとき、gluon 輻射による新たな phase space が現れるから、

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{10}^2; x_1) &= 2N \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{\delta x_1}{2x_1} \int \frac{d^2 \mathbf{b}_2}{2\pi} \frac{b_{10}^2}{b_{20}^2 b_{21}^2} \\ &\times [\tilde{\mathcal{G}}(x, b_{21}^2; x_1) + \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{20}^2; x_1) - \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{10}^2; x_1)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

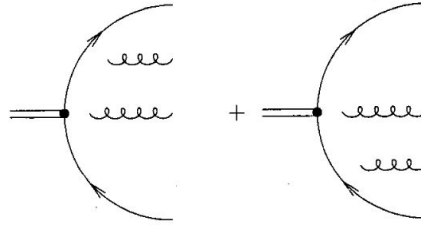


図 3.6: 2-gluon の輻射

一方、longitudinal boost invariance (これは rapidity が運動量方向の Lorentz 変換に対して定数だけ変化すること、つまりその差が不変であることと同じ意味である) より、 $\tilde{\mathcal{G}}$ は x/x_1 の函数として書ける。

$$x \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial x} = -x_1 \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial x_1} \quad (3.29)$$

こうして BFKL 方程式が得られる。

$$\begin{aligned} x \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{10}^2) &= -\frac{N\alpha_s}{2\pi^2} \int d^2 \mathbf{b}_2 \frac{b_{10}^2}{b_{20}^2 b_{21}^2} \\ &\times [\tilde{\mathcal{G}}(x, b_{21}^2; x_1) + \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{20}^2; x_1) - \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{10}^2; x_1)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

とくに (3.30) は、 k_T の strong ordering を課すとき、Altarelli-Parisi の結果 (3.18) を再現することに注意する。これは実際、 k_T の strong ordering を

impact parameter の strong ordering と読みかえることで再現できる。これは物理的には、2-gluon が quark の近傍に存在しているか、または antiquark の近傍に存在するか、いずれかに対応する。すなわち (3.30) は、 $b_{21}^2 \ll b_{10}^2$ 、 $b_{20}^2 \simeq b_{10}^2$ または、 $b_{20}^2 \ll b_{10}^2$ 、 $b_{21}^2 \simeq b_{10}^2$ の近似の下で、

$$x \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{10}^2) \sim -\frac{N\alpha_s}{2\pi} \left[\int^{b_{10}^2} \frac{db_{21}^2}{b_{21}^2} \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{21}^2) + \int^{b_{10}^2} \frac{db_{20}^2}{b_{20}^2} \tilde{\mathcal{G}}(x, b_{20}^2) \right] \quad (3.31)$$

こうして、

$$b^2 \frac{\partial}{\partial b^2} x \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathcal{G}}(x, b^2) \sim -\frac{N\alpha_s}{\pi} \tilde{\mathcal{G}}(x, b^2) \quad (3.32)$$

この方程式の解は small- x の漸近的近似の下で、

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, b^2) \sim \tilde{\mathcal{G}}(x_0, b_0^2) \exp \sqrt{\frac{4N\alpha_s}{\pi} \ln \frac{x_0}{x} \ln \frac{b_0^2}{b^2}} \quad (3.33)$$

すなわち、これを fixed- α_s として与えたのが (3.18) であり、small- x で $\exp \sqrt{\ln 1/x}$ として同じ振舞いが再現された。

さて、この小節の冒頭で述べたように、実際のところ small- x では、 k_T (or b^2) に strong ordering は入らない。gluon 分布函数への small- x での重要な寄与は leading-log では、 $(\alpha_s \ln 1/x)^n$ から生じている。以降、(3.30) に戻り、上の b に対する ordering を取り払ったとき、分布函数がどのように表されるか見ていくことにする。

まず、(3.30) を扱いやすい形にするため、 ϕ 積分 ($0 < \phi < 2\pi$) が以下のように与えられることに注意する。

$$\int \frac{d^2 \mathbf{b}_2}{b_{21}^2} = \int \frac{b_{20} db_{20} d\phi}{b_{20}^2 + b_{10}^2 - 2b_{20}b_{10} \cos \phi} = \pi \int_0^\infty \frac{db_{20}^2}{|b_{20}^2 - b_{10}^2|} \quad (3.34)$$

ここで parameter u を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} b_{20}^2 &= ub^2 & \text{when } b_{20}^2 < b^2 \\ b_{20}^2 &= b^2/u & \text{when } b_{20}^2 > b^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

ここで、 $b_{10}^2 = b^2$ とおいた。こうして (3.30) は近似的に、

$$x \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathcal{G}}(x, b^2) = -\frac{N\alpha_s}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{1-u} [\tilde{\mathcal{G}}(x, ub^2)/u + \tilde{\mathcal{G}}(x, b^2/u) - 2\tilde{\mathcal{G}}(x, b^2)] \quad (3.36)$$

分布函数 $\tilde{\mathcal{G}}$ は、Mellin 変換から原理的に推測することが出来る。すなわち、

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, b^2) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i} (b^2)^\gamma \hat{\mathcal{G}}(x, \gamma) \quad (3.37)$$

ここで $\hat{\mathcal{G}}$ は次のように与えられるが、これを (3.37) に代入し再び Mellin 変換の定義を振り返れば、(3.36) を再現することは簡単に確かめることが出来る。

$$x \frac{\partial \hat{\mathcal{G}}}{\partial x} = -\bar{\alpha}_s \hat{\mathcal{G}} \int_0^1 \frac{du}{1-u} (u^{\gamma-1} + u^{-\gamma} - 2) \equiv -\bar{\alpha}_s \hat{\mathcal{G}} \chi(\gamma) \quad (3.38)$$

この微分方程式は直ちに解けて、

$$\hat{G}(x, \gamma) = \hat{G}(x_0, \gamma) \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)} \quad (3.39)$$

ここで、 $\bar{\alpha}_s = N\alpha_s/\pi$ 、 χ は *Lipatov characteristic function* と呼ばれている。

$$\chi(\gamma) = \int_0^1 \frac{u}{1-u} (u^{\gamma-1} + u^{-\gamma} - 2) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma) \quad (3.40)$$

また、 ψ は digamma function である。

$$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z) \quad (3.41)$$

解 (3.39) を (3.37) に代入することで、

$$\tilde{G}(x, b^2) = \int \frac{d\gamma}{2\pi i} \hat{G}(x_0, \gamma) \exp[\gamma \ln b^2 + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \ln(x_0/x)] \quad (3.42)$$

この積分は、 $\ln x_0/x$ が大きいいため鞍点 $\gamma = \gamma_s$ で近似できる。すなわち、

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x, b^2) &\sim \int \frac{d\gamma}{2\pi i} \hat{G}(x_0, \gamma_s) \exp[\phi(\gamma_s) + \frac{1}{2}\phi''(\gamma_s)(\gamma - \gamma_s)^2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi''(\gamma_s)}} \hat{G}(x_0, \gamma_s) \exp \phi(\gamma_s) \end{aligned} \quad (3.43)$$

ここで ϕ は次で定義した。

$$\begin{aligned} \phi(\gamma) &= \gamma \ln b^2 + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \ln(x_0/x) \quad i.e. \\ \phi'(\gamma_s) &= \ln b^2 + \bar{\alpha}_s \chi'(\gamma_s) \ln(x_0/x) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

図 3.7 は、Lipatov characteristic function の概形である (実線は next-leading)。 $\chi'(1/2) = 0$ だから、 $x \rightarrow 0$ のとき $\gamma_s \rightarrow 1/2$ とならなければならない。こうして small- x での $\tilde{G}(x, b^2)$ は、

$$\tilde{G}(x, b^2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi''(\frac{1}{2})}} \hat{G}(x_0, 1/2) \exp[\phi(1/2)] \propto b x^{-\lambda} \quad (3.45)$$

ここで、

$$\lambda = \alpha_s \chi(1/2) = 4N \ln 2 \frac{\alpha_s}{\pi} \quad (3.46)$$

最終的に、inclusive gluon 分布関数は、Fourier 変換によって k_T^2 の関数として、

$$\mathcal{G}(x, k_T^2) = \int d^2 \mathbf{b}_i e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{b}_i} \tilde{G}(x, b^2) \propto \frac{1}{\sqrt{k_T^2}} x^{-\lambda} \quad (3.47)$$

こうして分布関数は χ の最小値として決定される、 x の冪で発展することがわかる。この冪は $\bar{\alpha}_s \simeq \alpha_s = 0.2$ ($\simeq 10\text{GeV}$) のとき、おおよそ 0.5 であ

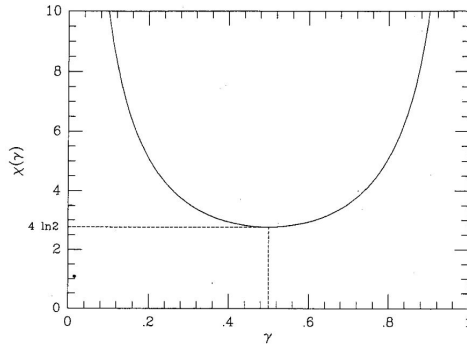


図 3.7: Lipatov characteristic function

る。図 3.3 からわかるように明らかにこの値は大きすぎる。しかし、これは next-leading $\alpha_s (\alpha_s \ln 1/x)^n$ までの近似で減少することがわかっている [9]。

実際、BFKL は摂動計算の難点からいくつかの不定性を含んでいるが、実験事実と矛盾するわけではない。一方で Altarelli-Parisi の記述は、以外にも small- x まで data と良い一致を見せているが、これが BFKL で記述される、あらゆる効果を再現しているかどうか言及することは難しい。

3.3 Gluon saturation

前節まで、摂動 QCD が、どのように small- x での分布函数の急激な上昇を予言するのか見てきた。しかしながら、明らかに $x^{-\lambda}$ による分布函数の上昇が、際限なく続くわけではない。それは、unitarity の制限を破ることになるからである。これは摂動 QCD の small- x に関する問題の 1 つとして知られている。これらの問題を解決する描像が Colour Glass Condensate (CGC) である。この節では、文献 [11] に基づいて CGC の理論的記述を復習する。

3.3.1 BFKL から gluon saturation へ

この小節では、後の準備として、基本的な方程式の道具立てと、考えるべき問題点を明らかにする。

さて、これまでの深非弾性散乱の記述は、hadron が極端に大きな運動量を持つ Lorentz frame (infinite momentum frame) に基づいていた。ここで、collision process の描像は frame に依存することに注意したい。いま、この process を hadron の rest frame で考えてみよう。このとき virtual photon γ^* は collision が起こる前に、quark-antiquark pair としてゆらいでいる。そしてこの colour dipole が、hadron から散乱されることになる。一方、ゆらぎ

の寿命は、相互作用する parton の longitudinal momentum (Bjorken- x) のおおよそ逆数で与えられるため、small- x の parton を取り扱うには都合がよい。また、通常 dipole の transverse size r_\perp ($r_\perp = x_\perp - y_\perp$, x_\perp : quark, y_\perp : antiquark) は非常にゆっくりと変化するものとし (frozen dipole)、さらに摂動的な扱いを許すため、dipole は十分に小さい ($Q^2 \equiv 1/r_\perp^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$) と仮定する。

前章までの議論 (hadron の infinit momentum frame) を、この dipole frame に応用するには、virtual photon γ^* が散乱以前に、十分な virtuality を持っていると考えればよい (図 3.8)。このとき、DIS cross-section は dipole- hadron の散乱振幅 $\mathcal{N}_\tau(r_\perp)$ と関係づけることができ [12]、

$$\mathcal{N}_\tau(r_\perp) \simeq r_\perp^2 \frac{\pi^2 \alpha_s C_F}{N^2 - 1} \frac{xg(x, 1/r_\perp^2)}{\pi R^2} \quad (3.48)$$

ここで $\tau (\equiv \ln 1/x)$ は、 γ^* と hadron の rapidity gap であり、 $xg(x, Q^2)/\pi R^2$ は、単位 transverse area 当たりの gluon の数である。また、gluon density は transverse 平面で一様であると仮定している。

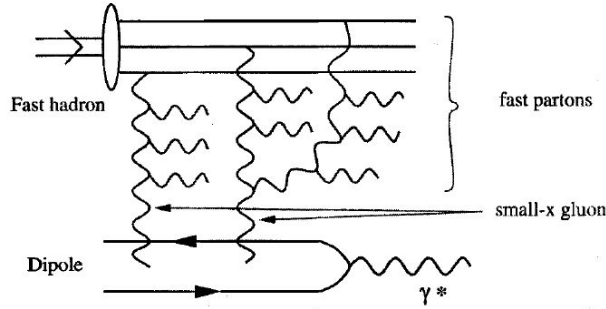


図 3.8: DIS in the dipole frame

前小節より、longitudinal momentum fraction x を持った gluon の数は leading-log の近似で、

$$\frac{dN_{gluon}}{d\tau} \equiv xg(x, Q^2) \sim x^{-\omega \bar{\alpha}_s} \quad (3.49)$$

ここで $\omega = 4 \ln 2$ である。ところで、ladder のすべての gluon (図 3.4) が等しい order Q の transverse momentum を持っているとは仮定すると、冪 ω のより厳密な取り扱いができる [10]。これは物理的には、次のように考えればよい。BFKL には、transverse momentum に ordering が入らないため、small- x の ordering に伴って生じる parton は、 k_T の random walk (diffusion) をもたらしっていると解釈できる。この random walk の平均幅を Q として導入するわけである。(ただし、この平均幅は、 s が大きくなるにつれて非摂動的領域になることに注意する。こうして、散乱の対象になる gluon が、たとえどん

なに大きな transverse scale を持っていたとしても、ある high energy 領域から摂動が安全に扱えなくなる。) このとき、

$$\frac{xg(x, Q^2)}{\pi R^2} \Big|_{BFKL} \simeq \sqrt{Q_0^2 Q^2} \exp \left\{ \omega \bar{\alpha}_s \tau - \frac{1}{2\beta \bar{\alpha}_s \tau} \left(\ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^2 \right\} \quad (3.50)$$

ここで Q_0^2 は Λ_{QCD} の order を持つ reference scale であり、 β は $\beta \approx 33.67$ として知られている。(3.50) は、その特徴として leading-log の近似の結果として現れる、2つの困難を見せている (small- x problem)。それは、

(a) *Violation of unitarity bound*: 高エネルギーでは、hadronic cross-section は gluon 分布関数に比例する (3.48)。そのとき (3.50) は、 $\sigma_{tot}(s) \sim s^{\omega \bar{\alpha}_s}$ へ導くが、これは Froissart bound $\sigma_{tot}(s) \leq \sigma_0 \ln^2 s$ を破る。

(b) *Infrared diffusion*: s が増すにつれて、ladder 内の gluon が担っている transverse momentum は、非摂動領域 $Q^2 \sim \Lambda_{QCD}^2$ へ広がってゆき、摂動展開が信頼できなくなる。

さて、これまでは、輻射された gluon は自由粒子として振舞うものと見なしてきた。しかしながら、他の gluon cascade から生じる、同じ rapidity を持った gluon 間の相互作用は厳として存在している (図 3.9)。そのような相互作用は、gluon density が大きくなるにつれて無視できない重要な効果である。

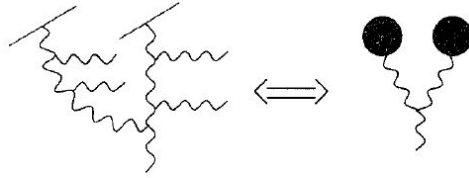


図 3.9: gluon recombination

この効果は、 n を gluon density として次のように見積もることができる。

$$\sigma(Q^2) \cdot n(x, Q^2) \sim \frac{\alpha_s N}{Q^2} \cdot \frac{1}{N^2 - 1} \frac{xg(x, Q^2)}{\pi R^2} \quad (3.51)$$

ここで因子 $\alpha_s N/Q^2$ は、gluon-gluon cross-section が、 $\sigma_{gg} \sim \alpha_s/Q^2$ で効くからである。この確率が、 $\mathcal{O}(1)$ に近づく Q^2 の値、すなわち Q_s^2 (*saturation momentum*) は、

$$Q_s^2(\tau) \simeq \frac{\alpha_s N}{N^2 - 1} \frac{xg(x, Q^2)}{\pi R^2} \quad (3.52)$$

言い換えれば、 $Q^2 \gg Q_s^2$ のときには、(3.51) の効果は十分無視できて、従来の近似による BFKL 方程式を適用できる。とくに、(3.52) に (3.50) を代入す

ることで saturation scale を見積もることができる。すなわち、

$$Q_s^2(\tau) = Q_0^2 e^{c\bar{\alpha}_s \tau}, \quad c \simeq 4.84 \quad (3.53)$$

こうして、 $Q^2 < Q_s^2$ のときには、 τ で発展する gluon 分布関数は、その発展が緩和されると期待できる。(3.52) は、CGC に対する *effective theory* によって示唆されている [13]。本論ではその詳細には触れないが、これによると発展方程式は次のように記述される。

$$\frac{\partial \mathcal{N}_\tau}{\partial \tau} = \bar{\alpha}_s K_{BFKL} \otimes \mathcal{N}_\tau - \bar{\alpha}_s \mathcal{N}_\tau \otimes \mathcal{N}_\tau \quad (3.54)$$

すなわち (3.52) は、hadron 波動関数の言葉で言えば、non-linear の効果が効いてくる scale である。反対に、 $Q^2 \gg Q_s^2$ のときには先にも述べたように、この効果は無視できて従来の BFKL 方程式を再現する。

さらに原子番号 A の原子核に対しては、 $xG(x, Q_s^2) \propto A$ 、 $\pi R_A^2 \propto A^{2/3}$ より、

$$Q_s^2(x, A) \sim A^\delta x^{-\lambda}, \quad \delta \approx 1/3, \lambda \approx c\bar{\alpha}_s \quad (3.55)$$

これは、原子番号が大きく、また大きな energy (small- x) の環境では、saturation momentum Q_s^2 が大きく ($Q_s^2(x, A) \gg \Lambda_{QCD}^2$) なることが期待できる。このような条件下では、摂動論が安全に適用できる。実際、RHIC における heavy ion collision では、この条件が満たされている。図 3.10 は、このとき見られる典型的な rapidity 分布である。実線、破線はそれぞれ、leading-particle と produced-particle を現している。とくに後者は、parton の rapidity 分布を反映していることに注意する。そして、図 3.11 は、異なった energy における rapidity 分布を $y - y_{proj}$ の関数として plot したものである。いま、 $y_{proj} - y \approx \ln 1/x$ であるから、図 3.11 は正に produced-particle の rapidity 分布は x のみの関数になっている。とりわけこの実験事実は、この章の始めで述べた BFKL の ordering に矛盾しないことが見て取れる。

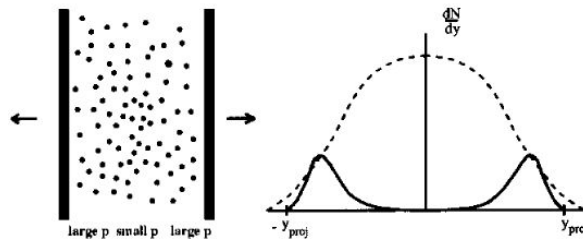


図 3.10: particle production in heavy ion collisions

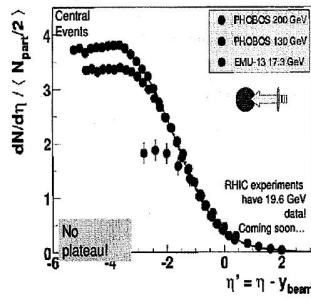


図 3.11: rapidity distribution at RHIC

3.3.2 Froissart bound と dipole-hadron 散乱

前小節では、dipole-hadron の散乱振幅が small- x でどのように緩和されるのかを見てきた。この小節では、この process における total cross-section の $s \rightarrow \infty$ による漸近的挙動を調べる。

さて、total cross-section は、impact parameter $b_{\perp} (= (x_{\perp} + y_{\perp})/2)$ にわたって積分を実行することで得られるから (図 3.12)、

$$\sigma_{tot}(\tau, r_{\perp}) = 2 \int d^2 b_{\perp} \mathcal{N}_{\tau}(r_{\perp}, b_{\perp}) \quad (3.56)$$

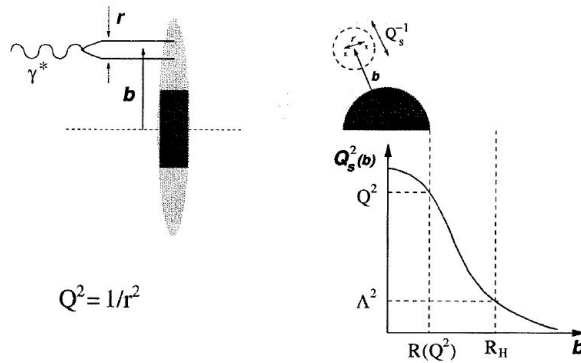


図 3.12: longitudinal(左)、transverse(右)-平面から見た dipole-hadron 散乱

(3.56) について議論すべき点は次の2つである。(i) fixed b_{\perp} での τ に関する散乱振幅の上昇、(ii) b_{\perp} の増加に伴う散乱振幅の減少。要するに (i) は、部分波 $\mathcal{N}_{\tau}(r_{\perp}, b_{\perp})$ が unitarity bound を超えられないという問題に関係し、(ii) は、strong interaction の伝播距離が有限であること、すなわち confinement の問題に関係する。(i) から見ていこう。(3.52) で定義した saturation scale

Q_s^2 を導入するとき、散乱振幅 \mathcal{N}_τ の r_\perp に対する振る舞いは数値的に研究されている。 $r_\perp \ll 1/Q_s^2(\tau, b_\perp)$ 、 $r_\perp \gg 1/Q_s^2(\tau, b_\perp)$ のときそれぞれ [15]、

$$\mathcal{N}_\tau(r_\perp, b_\perp) \simeq 1 - \exp \left\{ -r_\perp^2 \frac{\pi^2 \alpha_s C_F}{N^2 - 1} xg(x, 1/r_\perp^2, b_\perp^2) \right\} \quad (3.57)$$

$$\mathcal{N}_\tau(r_\perp, b_\perp) \approx 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2c} (\ln Q_s^2(\tau, b_\perp) r_\perp^2)^2 \right\} \quad (3.58)$$

図 3.13 から明らかなように、 \mathcal{N}_τ は unitarize されているのがわかる。すなわち、 τ の増加に伴って、 Q_s^2 は増加し resolution scale $Q^2 \equiv 1/r_\perp^2$ を上回る。直感的には、大きな r_\perp は、より広範囲にわたって hadron 付近の gluon を叩いていると理解できる。一方、unitarity limit: $\mathcal{N}_\tau(r_\perp, b_\perp) \simeq 1$ に達すれば、それ以上の energy 増加に伴う振幅の増加傾向は見られなくなる。これはちょうど dipole が hadron に吸収されたことに対応する。

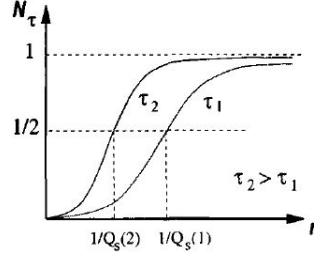


図 3.13: τ の異なる値における r_\perp に対する散乱振幅

さて、strong interaction は近距離相互作用をするため、gluon density は hadron の中心付近 (black disk) で大きいと考えることができる。この black disk は、 τ の増加に伴って、 $b_\perp = 0$ から半径方向へ広がってゆく (図 3.12)。この b_\perp の発展が、high energy における cross section の振る舞いを説明する。いま、black disk radius: $R(\tau, Q^2)$ を次で定義する。

$$\mathcal{N}_\tau(Q^2, b_\perp) \sim 1 \quad \text{for} \quad b \leq R(\tau, Q^2) \quad (3.59)$$

$$\text{or, } Q_s^2(\tau, b_\perp) = Q^2 \quad \text{for} \quad b = R(\tau, Q^2) \quad (3.60)$$

もちろん、(3.59) と (3.60) は等価である。 $R(\tau, Q^2)$ を計算するためには、 $b > R(\tau, Q^2)$ における散乱振幅の τ -evolution を理解する必要がある。これは正に quark の confinement と関係する。次に、この問題 (ii) について考えていこう。

$b > R(\tau, Q^2)$ のとき gluon density は小さく、また confinement の事情により振幅は指数関数で damp するはずである。そして、相互作用可能な伝播距離が $\mathcal{O}(m_\pi^{-1})$ で与えられるため (m_π は QCD の lowest mass である)、結局振幅は、

$$\mathcal{N}_\tau(Q^2, b_\perp) \propto e^{-2m_\pi b} \quad \text{for} \quad b - R(\tau, Q^2) > 1/2m_\pi \quad (3.61)$$

ここで2倍の因子は、isospin 保存のためである。すなわち、gluon の isospin が 0 であるのに対し、pion の isospin が 1 であるため、散乱は少なくとも 2 個の pion の交換が関与しなければならない。こうして、 $\mathcal{N}_\tau(Q^2, b_\perp)$ は、 $b_\perp \gg R(\tau, Q^2)$ のとき急激に減少するため、total cross-section は black disk によって支配される。結局、

$$\sigma_{tot}(\tau, Q^2) \simeq 2\pi R^2(\tau, Q^2) \quad (3.62)$$

残った問題は、black disk が τ と共にどう発展するかである。これは、摂動的取り扱いが可能な領域と、閉じ込めによる非摂動領域とを連絡する手続きに対応する。dipole が非常に小さいという仮定 ($Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$) と (3.60) から、 $R(\tau, Q^2) < b < R_H(\tau)$ (以下 corona) に少なくとも摂動が安全な領域が存在する。ここで $R_H(\tau)$ は、saturation scale が $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD}^2)$ まで強く damp すると期待できる半径である。言い換えれば、corona 内の impact parameter に対しては、 $\mathcal{N}_\tau(Q^2, b_\perp) \ll 1$ のため、linear な BFKL 方程式が適応され、colour source と dipole 間の遠距離相互作用を記述する。そして一方で、 r_\perp が Q_s^{-1} を上回るときこの相互作用は non-linear の効果によって抑制されるわけである。ここで、saturation scale が $Q_s \sim \Lambda_{QCD}$ (confinement の役割を果たす) のとき、BFKL 方程式はこの infrared cutoff によって補正を受けることに注意する。

以上より、black disk の τ -evolution は hadron 内部の parton に関する不均一性には過敏でなく、それは大きな scale、 $1/m_\pi \sim 1/\Lambda_{QCD}$ ((3.61) 参照) において現れることがわかる。こうして、散乱振幅の b_\perp 依存性は次のように factorize できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\tau(Q^2, b_\perp) \Big|_{grey} &\simeq \mathcal{N}_\tau(Q^2) \Big|_{BFKL} \cdot e^{-2m_\pi b} \\ &\simeq \exp \left\{ -2m_\pi b + \omega \bar{\alpha}_s \tau - \frac{1}{2} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

これは、grey corona 内の領域においてのみ適応されるわけであるが、条件 (3.59) から black disk の半径を見積もることができる。

$$R(\tau, Q^2) \simeq \frac{1}{2m_\pi} \left(\omega \bar{\alpha}_s \tau - \frac{1}{2} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) \quad (3.64)$$

よって total cross-section は、

$$\sigma_{tot}(s, Q^2) \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega \bar{\alpha}_s}{m_\pi} \right)^2 \ln^2 s \quad \text{as } s \rightarrow \infty \quad (3.65)$$

こうして、 σ_{tot} は Froissart bound を満たし、その機構は上で述べた gluon saturation のような物理的描像を反映している。さらに、(3.59)、(3.60) から $R_H(\tau)$ を計算すると、当然 $Q^2 \sim \Lambda_{QCD}^2$ に対する black disk の半径と等しい結果が導かれる。

$$R_H(\tau) \approx \frac{\omega \bar{\alpha}_s}{2m_\pi} \tau \quad (3.66)$$

(3.64)、(3.66) から摂動が適用できる grey colona の幅は、

$$R_H(\tau) - R(\tau, Q^2) \approx \frac{1}{4m_\pi} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \quad (3.67)$$

これは τ に独立であり、また大きな $\ln Q^2/\Lambda^2$ のため、 $1/m_\pi$ よりも十分大きい。そのため、これまでの計算と矛盾することなく、この領域では摂動が安全である。無論、(3.64) から明らかなように、time interval $\Delta\tau$ が極端に大きければ、 $Q_s^2 \ll \Lambda_{QCD}^2$ の領域に踏み込むことになり、摂動的に分布函数や散乱振幅を計算することに意味は無くなる。

3.3.3 現象論への応用

この小節では、CGC の現象論に対する応用を見ていくことにする。まず最初に、最近の HERA の data より、model と実験事実とをつき合わせてみよう [14]。図 3.14 は、HERA における $x < 0.01$, $Q^2 < 400 \text{ GeV}^2$ に対する、 γ^*p の data である。ここで興味深いのは、変数 Q^2/Q_0^2 (Q_0^2 : reference scale) に関して scale 特性を見せていることである。

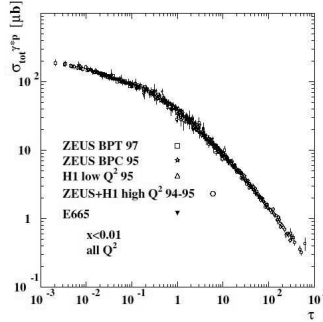


図 3.14: $x < 0.01$, $Q^2 < 400 \text{ GeV}^2$ における DIS cross-section. ここで、 $\mathcal{T} = Q^2/Q_0^2$.

一方で linear な BFKL 方程式は、(3.48)、(3.50) より、

$$\mathcal{N}_\tau(Q^2) \Big|_{BFKL} \simeq \exp \left\{ \omega \bar{\alpha}_s \tau - \frac{1}{2} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2\beta \bar{\alpha}_s \tau} \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^2 \right\} \quad (3.68)$$

これは、指数の中の第 3 項から明らかに scale しない。では、これまで考えてきた dipole-hadron 散乱に基づいて、上の散乱振幅を書き直してみよう。 Λ^2 を saturation scale Q_s^2 で置き換えればよいから、(3.53) を使って、

$$\ln(Q^2/\Lambda^2) = \ln(Q^2/Q_s^2(\tau)) + c\bar{\alpha}_s\tau \quad (3.69)$$

よって直ちに、

$$\mathcal{N}_\tau(Q^2) \simeq \exp \left\{ -\lambda_s \ln \frac{Q^2}{Q_s^2(\tau)} - \frac{1}{2\beta\bar{\alpha}_s\tau} \left(\ln \frac{Q^2}{Q_s^2(\tau)} \right)^2 \right\}, \quad \lambda_s \approx 0.64 \quad (3.70)$$

(3.70) の指数は、 $Q^2 = Q_s^2(\tau)$ のとき 0 になる。これは、BFKL が non-linear の効果により damp し、その結果 unitarity を回復するという我々の期待 (3.71) を再現する。

$$\mathcal{N}_\tau(r_\perp) \simeq 1 \quad \text{for } r_\perp \sim 1/Q_s(\tau) \quad (3.71)$$

こうして、(3.70) は $Q^2 \sim Q_s^2$ のとき、指数の第 2 項は無視できるため scaling 特性が現れるのがわかる。この結果は、 $Q_s^2 \leq Q^2 < Q_s^4/\Lambda^2$ の領域において、 $\mathcal{O}(100\text{GeV}^2)$ まで data とよい一致を見せることが知られている。

このような CGC の効果を暗示する実験結果は、RHIC の heavy ion collision においても見ることができる。近年、 $Au - Au$ collision における particle production が、CGC の観点から初めて解析された [16]。ここでは、測定された multiplicity を、 p_T の central 依存性等に関して、CGC の予想と比較している。

第4章 まとめと今後

本修士論文では、摂動 QCD が、small Bjorken- x での DIS-process にどのような解釈をあたえるのか、その方法として、Altarelli-Parisi 方程式と BFKL との関係を概観した。そして最後に、最近の現象論への応用を見てきた。この章では本論文のまとめをし、残された課題について述べる。

HERA での深非弾性散乱における構造関数 F_2 の測定実験や、RHIC の heavy ion collision による Bjorken- x の range は、Altarelli-Parisi 方程式の予想を凌ぐ、small- x の取り扱いが可能である。しかしながら、我々は small- x evolution の完全な理解には至っていない。

HERA では、 Q^2 が非常に小さいほとんど real photon のものから、0.5 GeV² 付近までの測定が可能である。こうした測定器の改良が、reggeon の取り扱いと深非弾性散乱の取り扱いの統一的な理解が求められる。また RHIC の実験 data が提示する、collision の初期の段階における free parton が hadronization に至るまでの一連の発展については、第 1 原理からは殆んど知られていない。

摂動 QCD に基づいて、こうした高エネルギーでの振る舞いを理解する際注意すべきは、

(a) 理論的な解析は、coupling constant α_s が小さいという信頼の上で意味を成す。言い換えれば、十分に大きな scale $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ を要求する。

(b) 今日に至るまで、大部分の model 計算は、 α_s の lowest order にすぎない。今後 NLO の補正が要求される。ごく最近、NLO BFKL に基づいて dipole-model の評価が成されている。しかしこれも、non-linear の効果まで含んだ NLO の完全な記述は発展途上の段階である。

この研究が、HERA や RHIC の実験結果に新たな解析手段を与え、hadron structure の解明に貢献できるものと信ずる。

謝辞

本修士論文作成に当たって、本当に多くの方々にお世話になりました。素粒子論研究室の小平先生は、どんなに小さな疑問にもいつも丁寧に答えて下さりました。

指導教官の杉立先生は、若干専門の異なる私の研究活動にも、多くの助言を提供して下さいました。私は、常に幅広い分野へ関心を持つことがとても大切であることを杉立先生から教わりました。

研究室助教授の志垣先生は、研究活動は勿論、進路の方向性など日頃から色々と相談に乗って下さりました。

研究室助手の本間先生は、毎日のように声をかけて下さり、とても励みになりました。本間先生からは、自然科学を学ぶことの面白さを教わりました。

素粒子論研究室の清水さんには、セミナーを通じて基本的な計算から物理描像に至るまで、わからないところを丁寧に教えて下さりました。清水さんがいなければこの論文を書き上げることは出来ませんでした。

クォーク物理学研究室の先輩方からは、問題点や物理的解釈など、日頃からの私の疑問に対して、多くのアドバイスを提供して下さいました。そして物理学に限らず、物事を多角的に捉えることの大切さを教わりました。

素粒子論研究室そして中間高エネルギー実験研究室の同輩の方々には、研究の方向性や進路についてなど、いろいろと相談に乗って下さりました。

研究室の後輩方からは、PC や UNIX の使い方を教わりました。とくに、M1 の平下君からは、PC の基本的な操作方法から TEX のコードの書き方に至るまで多くのアドバイスをいただきました。

最後に、常に私の支えになってくれた実家の家族に感謝したいと思います。すべてを書ききれないことが非常に残念ですが、これほど多くの方々の協力を得ることができて私は大変嬉しく思います。皆様、ありがとうございました。

参考文献

- [1] D.J.Bjorken, Phys.Rev.179 (1969)1547.
- [2] G.Curci,W.Furmanski and R.Petronzio, Nucl.Phys.B175 (1980)27.
- [3] W.L.van Neerven,A.Vogt, Nucl.Phys.B568 (2000) 263-286.
- [4] W.L.van Neerven,A.Vogt, Nucl.Phys.B588 (2000) 345-373.
- [5] A.Donnachie,P.V.Landshoff, Phys.Lett.B437 (1998) 408.
- [6] A.D.Martin,R.G.Roberts,W.J.Stirling, Phys.Lett.B354 (1995)155.
- [7] H1 Collaboration, hep-ex/9603004.
- [8] A.H.Mueller, Nucl.Phys.B415 (1994)373-385.
- [9] G.P.Salam, hep-ph/9910492.
- [10] E.Iancu,K. Itakura, hep-ph/0310338.
- [11] E.Iancu, Nucl.Phys.A715 (2003)219c-232c.
- [12] A.H.Mueller, Nucl.Phys.B335 (1990)115.
- [13] Yu.V.Kovchegov, Phys.Rev.D60 (1999)034008.
- [14] A.M.Staśto,K.Golec-Biernat,J.Kwieciński,Phys.Rev.Lett.86 (2001)596.
- [15] E.Iancu,L.McLerran, Phys.Lett.B510 (2001)145.
- [16] D.Kharzeev,M.Nardi, Phys.Lett.B507 (2001)121.
- [17] A.V.Kotikov,A.V.Lipatov,G.Parente,and N.P.Zotov, hep-ph/0304078.
- [18] N.Saito, Nucl.Phys.A698 (2002)275c-286c.
- [19] H1 Collaboration,I.Abt et al., Nucl.Phys.B407 (1993).515